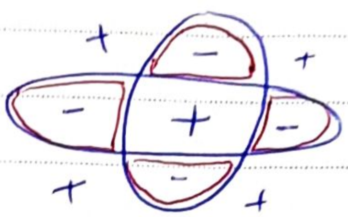
Από το Quiz.

04-03-2019
3η διάλεξη

1) $V(Q_1Q_2+\varepsilon)$, ΕΤΟ

Q_1, Q_2 κωνικές ανάγωγες



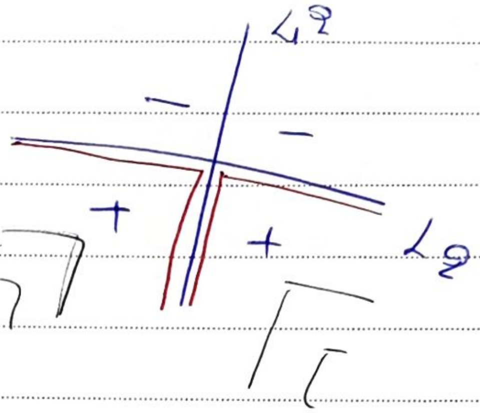
(επαναλαμβανόμενα θέματα εξετάσεων)

2) $V(L_1^2L_2-\varepsilon)$

L_1, L_2 ευθείες

με ΕΤΟ

$L_1^2L_2=\varepsilon$



Εάν μας βάλει μη ανάγωγο, πρέπει να το κάνω εγώ ανάγωγο. (Θα είναι ορατή η παραγοντοποίηση, (π.χ. κύκλοι και ευθεία)) Θα και να δω πρώτα εξισορροπήσω το ανάγωγο και μετά το άλλο.

Ρητές Καμπύλες

Ορισμός: Μια ανάγωγη επίπεδη αλγεβρική καμπύλη λέγεται ρητή καμπύλη αν οι συντεταγμένες των σημείων της εκφράζονται συναρτήσει ρητών συναρτήσεων ως προς παράμετρο t.

↳ π.χ. κύκλος 1) $x=r\cos t$, $y=r\sin t$

2) $x^2+y^2=1$, $x=t$ $y=\pm\sqrt{1-t^2}$

αυτές όμως δεν είναι ρητές

$f(x,y)=0 \iff f(x(t),y(t))=0$

$V(f)$

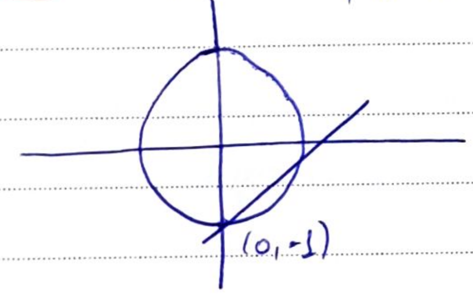
Ισοδύναμα: η $V(f)$ λέγεται ρητή καμπύλη αν υπάρχουν ρητές συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ έτσι ώστε
1) $f(x(t), y(t)) = 0$
2) $\forall (x,y)$ με $f(x,y)=0$ $\exists$ μοναδικό t με $x=x(t), y=y(t)$ εκτός πεπερασμένων εξαιρέσεων.

Παρατήρηση: Οι προ-αναφερ. εξαιρέσεις:
υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος σημείων (καμπύλης)
1) όπου το t όχι μοναδικό
2) και όπου το t δεν ορίζεται

! Επαναλαμβανόμενο θέμα εξετάσεων ! με διαφορ. συνάρτηση
Παραδείγματα: Να δειχθεί ότι ο κύκλος $V(x^2+y^2-1)$ είναι ρητή καμπύλη.
(Είναι το ίδιο, εάν είχα $\mathbb{Q}, \mathbb{C}$)

Κύκλος, Έλλειψη, Υπερβολή $\Rightarrow$ η διαδικασία είναι ίδια
Εάν έχω κάτι άλλο θα δίνεται η παραμετρικοποίηση.

Βήμα 1ο: Εύρεση παραμετρικοποίησης



Ευθεία που διέρχεται από το $(\overset{x_0}{0}, \overset{y_0}{-1}) \in V(x^2+y^2-1)$ και έχει κλίση t και τέμνει τη $V(x^2+y^2-1)$ σε 2ο σημείο.

$y-y_0 = t(x-x_0) \Rightarrow y+1 = tx$, $t \in \mathbb{R}$ (εκτός πεπερ. εξαιρέσεων)

$t = \frac{y+1}{x}$ → (εξαιρ. το $(0,1)$)

Άρα, ο κύκλος λύση συστήματος:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ y+1=tx \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+(y-1)(y+1)=0 \\ y+1=tx \end{cases}$$

$y-1=tx-2$

$$\iff \begin{cases} x^2+(y-1)\cdot tx=0 \\ y+1=tx \end{cases} \iff \begin{cases} x(x+(y-1)t)=0 \\ y+1=tx \end{cases}$$

$x=0$ ή $x+(y-1)t=0$

$\downarrow$ $\iff x+(tx-2)\cdot t=0$

$y=-1$ $\iff x+t^2x-2t=0$

$(0,-1)$ $\iff \boxed{x=\dfrac{2t}{1+t^2}}$

Αρα, $y=\dfrac{2t^2}{1+t^2}-\dfrac{1+t^2}{1+t^2}=\dfrac{t^2-1}{1+t^2}=y$

(αν $k=\mathbb{C}$ τότε $t\neq\pm i$)

Βημα 2°: Πρέπει να δειχθεί ότι μπορούμε να την δεχτούμε

Εαν είχα: $3x^2+2y^2=5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x^2+2y^2-5=0$
$\Rightarrow 3x^2-3+2y^2-2=0$
$\Rightarrow 3(x-1)(x+1)+2(y-1)(y+1)=0$

για να έχω ευκολες πράξεις

Θα δ.ο. i) $f(x(t),y(t))=0$ και $\forall (x_0,y_0)\in V(x^2+y^2-1)$ $\exists$ (μοναδ) (iii) t_0 (ii) $x_0=x(t_0)$
$y_0=y(t_0)$

$$f(x(t),y(t)) = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}\right)^2 - 1 = \dots = 0$$

$x(t_0)$

(ii) x_0: $$\frac{2t_0}{1+t_0^2} = \frac{2\left(\frac{y_0+1}{x_0}\right)}{1+\left(\frac{y_0+1}{x_0}\right)^2} = \frac{\frac{2(y_0+1)}{x_0}}{\frac{x_0^2+(y_0+1)^2}{x_0^2}} = \frac{2(y_0+1)x_0}{x_0^2+(y_0+1)^2} = \frac{2(y_0+1)x_0}{\underbrace{x_0^2+y_0^2}_{1}+2y_0+1} =$$

$$= \frac{\cancel{2(y_0+1)}\cdot x_0}{\cancel{2(y_0+1)}} = x_0$$

$$y(t_0) = \frac{t_0^2-1}{1+t_0^2} = \frac{\left(\frac{y_0+1}{x_0}\right)^2 - 1}{1+\left(\frac{y_0+1}{x_0}\right)^2} = \frac{(y_0+1)^2 - x_0^2}{x_0^2+(y_0+1)^2} = \frac{y_0^2+2y_0+1-x_0^2}{x_0^2+2y_0^2+y_0^2+1} =$$

προσθαφαιρώ x_0^2 $$= \frac{y_0^2+x_0^2+2y_0+1-x_0^2-x_0^2}{x_0^2+y_0^2+2y_0^2+1} = \frac{2y_0+2-2x_0^2}{2(1+y_0)}$$

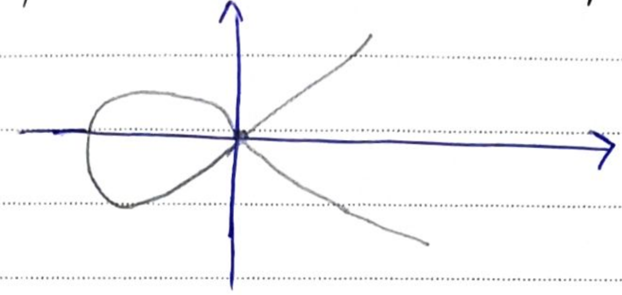
$$= \frac{2(1+y_0)-2(1-y_0^2)}{2(1+y_0)} = \frac{\cancel{2(1+y_0)}(1-(1-y_0))}{\cancel{2(1+y_0)}} = y_0$$

(iii) μοναδικότητα :

για (x_0,y_0) $\exists\, t_0 = \frac{y_0+1}{x_0}$: $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ $$\frac{y_0+1}{x_0} = \frac{y(t_0)+1}{x(t_0)} = \dots = t_0$$

Έστω ότι $\exists\, t_1$: $x_0 = x(t_1)$, $y_0 = y(t_1)$ $$\frac{y_0+1}{x_0} = \frac{y(t_1)+1}{x(t_1)} = \dots = t_1$$

Παράδειγμα 2: Να δειχθεί ότι η καμπύλη $V(y^2-x^3-x^2)$ είναι ρητή. Δίνεται ότι η καμπύλη είναι η



Δεν είναι τελείως ξεκάθαρη η επιλογή των σημείων.
Μόνο εάν είναι κύκλος, έλλειψη, υπερβολή που είναι ρητές συναρτήσεις.

(*) οικογένεια καμπυλών (ευθειών) που γεννάω πρέπει να έχει τομή σε 2 σημεία με την καμπύλη (ένα αυτό που θα γεννήσω και το 2ο που θα μου δώσει τη ρητή παραμετροποίηση)
x (μοναδική λύση ρητή ως προς $x, y = (\ )$

Επιλέγω οικογένεια ευθειών $y=tx$ (διέρχ. από το $(0,0) \in V(y^2-x^3-x^2)$)

$$\begin{cases} y = tx \\ y^2-x^3-x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{t = \frac{y}{x}}$$

$$(tx)^2 - x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(t^2 - x - 1) = 0$$

$x=0$ ή $x = t^2-1$ άρα, $y = t^3 - t$

διπλή λύση

γιατί περνάω από το $(0,0)$ σημείο

(i) $f(x(t), y(t)) = (t^3-t)^2 - (t^2-1)^3 - (t^2-1)^2 = \dots = 0$

Για την μοναδικότητα όπως πριν

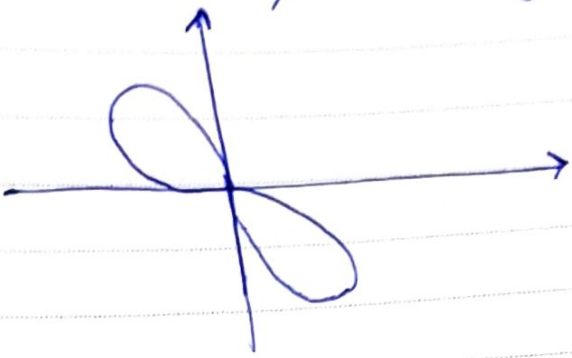
άρα, η καμπύλη ρητή

Δεν εξαιρέσαμε τίποτα εδώ.

(ii) $\begin{cases} y(t_0) = t_0^3 - t_0 = \left(\frac{y_0}{x_0}\right)^3 - \frac{y_0}{x_0} = \dots = y_0 \\ x(t_0) = \dots = x_0 \end{cases}$

Για $(0,0) \to$ το t είναι 1 και -1

Παράδειγμα 3 : Θδο η καμπύλη $V(xy + (x^2+y^2)^2)$ είναι ρητή.



αν ευθεία και να πάρω δεν με καλύπτει.

Οι οικογένειες ευθειών ως επιλογή δεν είναι καλή καθώς δεν μου δίνει ρητή παραμετρικοποίηση γιατί έχουμε περισσότερα από 2 σημεία τομή ευθείας και καμπύλης.

Θέλω να φύγει το x^2+y^2.
Άρα, θεωρώ την οικογένεια κύκλων

$$x^2+y^2 = ty$$
$$\Rightarrow x^2+y^2 - ty = 0$$
$$x^2+y^2 - 2\cdot\frac{t}{2}\cdot y + \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{4} = 0$$
$$\Rightarrow x^2 + \left(y-\frac{t}{2}\right)^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2$$

Έχω $C\left(0,\frac{t}{2}\right)$ και $\rho = \frac{t}{2}$
κέντρο πάνω στον $y'y$

$$\begin{cases} xy + (x^2+y^2)^2 = 0 \\ x^2+y^2 = ty \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \{\ xy + t^2y^2 = 0 \Rightarrow y(x+t^2y) = 0$

$y=0 \Rightarrow x=0$ $(0,0)$ διπλό σημείο

ή $x = -t^2y \rightsquigarrow (-t^2y)^2 + y^2 - ty = 0$

$\Rightarrow y(y + t^4y - t) = 0$

$y=0$, $x=0$ | $y + t^4y - t = 0$

$\Rightarrow y = \frac{t}{1+t^4}$